经济统计 – 9

刁莉男
diaoln@jlu.edu.cn
吉林大学商学院

May 23, 2012

复习

- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差已知：

复习

- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差已知：
- z统计量。

复习

- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差已知：
- z统计量。
- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差未知：

复习

- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差已知：
- z统计量。
- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差未知：
- t统计量。

复习

- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差已知：
- z统计量。
- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差未知：
- t统计量。
- 单样本假设检验，检验总体比例：

复习

- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差已知：
- z统计量。
- 单样本假设检验，检验总体均值，总体标准差未知：
- t统计量。
- 单样本假设检验，检验总体比例：
- z统计量。

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：
- z统计量。

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：
- z统计量。
- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差未知（标准差相等/不等）：

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：
- z统计量。
- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差未知（标准差相等/不等）：
- t统计量。

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：
- z统计量。
- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差未知（标准差相等/不等）：
- t统计量。
- 双样本假设检验，检验总体比例：

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：
- z统计量。
- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差未知（标准差相等/不等）：
- t统计量。
- 双样本假设检验，检验总体比例：
- z统计量。

复习

- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差已知：
- z统计量。
- 双样本假设检验，检验总体均值，独立样本，总体标准差未知（标准差相等/不等）：
- t统计量。
- 双样本假设检验，检验总体比例：
- z统计量。
- 双样本假设检验，检验总体均值，依赖性样本：t统计量。

提纲

12. 方差分析(Analysis of Variance)

1、F分布；

2、比较两个总体方差；

3、ANOVA假设；

4、ANOVA检验；

5、配对处理均值的统计推断；

本章重点

- 1、F分布性质；
- 2、统计检验两总体方差是否相等；
- 3、ANOVA思路；
- 4、ANOVA表；
- 5、检验多个（三个以上）总体均值；
- 6、构造总体均值差的置信区间。

1、F分布；

F分布定义

if $X_1 \sim \chi^2_{df_1}, X_2 \sim \chi^2_{df_2}$

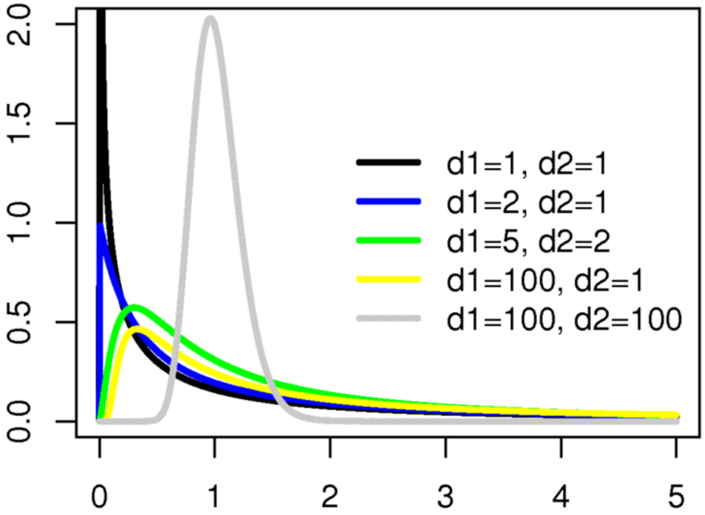
then

$\frac{X_1/df_1}{X_2/df_2} \sim F(df_1, df_2)$

F分布性质

- F分布族：由两个参数决定，分母和分子的自由度。
- 连续；
- 非负；
- 正偏；
- 渐近。

F分布性质



d1=1, d2=1
d1=2, d2=1
d1=5, d2=2
d1=100, d2=1
d1=100, d2=100
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
1
2
3
4
5

F分布

- 用来检验两样本是否从具有相同方差的总体中得到；
- 用来比较多个总体均值。

同时比较多个总体均值被称为方差分析(ANOVA)。

- 总体服从正态分布；
- 数据为定距尺度或定比尺度数据。

2、F分布的第一个应用：

比较两个总体方差；

比较两个总体方差

- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- 所构造统计量为：
  $F(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
- $F(n_1 - 1, n_2 - 1) = \dfrac{\frac{1}{n_1 - 1} \frac{\Sigma(X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{n_2 - 1} \frac{\Sigma(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{\sigma_2^2}}$

例子：

下表列出了去机场两条路所用的时间，在10%置信水平下检验所用时间的方差是否有区别。

US Route 25	Interstate 75
52	59
67	60
56	61
45	51
70	56
54	63
64	57
	65

例子

- $\bar{X}_1 = 58.29, \bar{X}_2 = 59.00$
- $s_1 = \sqrt{\frac{\Sigma(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}} = 8.9947$

  $s_2 = \sqrt{\frac{\Sigma(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}} = 4.3753$
- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- 显著性水平$\alpha = 0.10$;
- 构造统计量： $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 4.23$;
- 临界值： $F_{0.05}(6,7) = 3.87$，拒绝域

  $F > F_{0.05}(6,7)$，拒绝原假设。
- $p = 0.04 * 2$，拒绝原假设。

通常，将较大的方差放在分子，较小的方差放在分母

- $s_1 = \sqrt{\frac{\Sigma(X_1-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}} = 8.9947$
  $s_2 = \sqrt{\frac{\Sigma(X_2-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}} = 4.3753$
- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- 显著性水平$\alpha = 0.10$；
- 构造统计量： $F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = 0.2366$；
- 临界值： $F_{0.95}(7,6) = 0.2587$，拒绝域
  $F < F_{0.95}(7,6)$；
- $p = 0.08$，拒绝原假设。

单边检验

- $s_1 = \sqrt{\frac{\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1}} = 8.9947$
  $s_2 = \sqrt{\frac{\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}} = 4.3753$
- $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2; H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
- 显著性水平$\alpha = 0.05$；
- 构造统计量： $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 4.23$；
- 临界值：$F_{0.05}(6, 7) = 3.87$，拒绝域
  $F > F_{0.05}(6, 7)$；
- $p = 0.04$，拒绝原假设。

F分布第二个应用：检验多个总体均值是否相等

3、ANOVA假设；

检验多个总体均值是否相等

- 两两总体进行t检验；
  每个t检验显著性水平为α，则k个t检验全部正确概率为：
  $p(AllCorrect) = (1-\alpha)^k$
  至少有一个错误的概率为：
  $1-(1-\alpha)^k$
- 方差分析（ANOVA）。

ANOVA假设

- 总体服从正态分布；
- 总体有相同标准差；
- 总体互相独立。

例子

某金融中心主管比较4名员工工作能力是否相同，通过比较每天服务的客户数量来进行。随机抽取4天，数据如下：

day	Wolfe	White	Korosa
1	55	66	47
2	54	76	51
3	59	67	46
4	56	71	48
Total	224	280	192
Mean	56	70	48

一些概念

- 两种误差
  - 系统误差、条件误差、组间误差；
  - 随机误差、偶然误差、组内误差。
- 因素、因子：所检验的对象。例如：员工工作能力，<u>单因素方差分析</u>。
- 水平或处理（Treatment）。例如：4名员工。
- 观测值。

4、ANOVA检验；

ANOVA检验

- 为了检验多个总体均值是否相同，我们通过检验方差来进行。
- 将总方差或总变差（Total Variation）分解为处理变差（Treatment Variation）和随机变差（Random Variation）。
- 处理(Treatment)引起的误差，表现在均值上；随机因素引起的误差，表现在组内误差上。

总变差、总方差、总误差平方和，（Sum of Squares Total, SSTotal）

- 每个观测值与总平均值差的平方和；
- 总平均值(Grand Mean)
  $\bar{X}_G = \frac{\Sigma_1^k \Sigma_1^{n_i} X_{ij}}{n}$
- $SSTotal = \Sigma_1^k \Sigma_1^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_G)^2$
- df=n-1；
- 反映的是总误差。

处理变差、组间平方和，（Sum of Squares Treatment, SST）

- 每组均值与总平均值离差平方和；
- $\bar{X}_i = \frac{\Sigma_1^{n_i} X_{ij}}{n_i}$
- $SST = \Sigma_1^k \Sigma_1^{n_i} (\bar{X}_i - \bar{X}_G)^2 = \Sigma_1^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X}_G)$
- df=k-1；
- 反映的是由系统因素引起的条件误差。

随机变差、组内平方和，（Sum of Squares Errors, SSE）

- 每组观测值与组平均值离差平方和；
- $SSE = \Sigma_1^k \Sigma_1^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$；
- df=n-k； $n = \Sigma n_i$
- 反映的是由偶然因素引起的随机抽样误差。

三个变差之间的关系

$$\text{SSTotal} = \text{SST} + \text{SSE};$$

$$\Sigma(X - \bar{X}_G)^2 = \Sigma(\bar{X}_i - \bar{X}_G)^2 + \Sigma(X - \bar{X}_i)^2$$

构造统计量

$$F = \frac{SST/k-1}{SSE/n-k} \sim F(k-1, n-k)$$

上一例子：

	Wolfe	White	Korosa	Grand Mean
	55	66	47	
	54	76	51	
	59	67	46	
	56	71	48	
Mean	56	70	48	58

上例

- $SSTotal = \Sigma_1^k \Sigma_1^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_G)^2 = (55-58)^2 + (54-58)^2 + ... + (66-58)^2 + (76-58)^2 + ... + (47-58)^2 + (51-58)^2 + ... = 1082$
- $SST = \Sigma_1^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X}_G) = 4*(56-58)^2 + 4*(70-58)^2 + 4*(48-58)^2 = 992$
- $SSE = \Sigma_1^k \Sigma_1^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = (55-56)^2 + (54-56)^2 + ... + (66-70)^2 + (76-70)^2 + ... + (47-48)^2 + (51-48)^2 + ... = 90$

统计检验

- $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, H_1$:不完全相等;
- 置信水平5%;
- 单边。统计量:
  $$F = \frac{SST/k-1}{SSE/n-k} = \frac{992/2}{90/9} = 49.6$$
- 临界值 $F_{0.05}(2,9) = 4.2565,$
  拒绝域$F > F_{0.05}(2,9)$;
- p=0.00001;
- 拒绝原假设;至少有两个员工均值不相等。

例2

乘客对不同航空公司服务打分，分数越高服务越好，使用方差分析方法检验航空公司服务是否相同。具体数据如下：

Eastern	TWA	Allegheny	Ozark
94	75	70	68
90	68	73	70
85	77	76	72
80	83	78	65
	88	80	74
		68	65
		65	

使用ANOVA表

ANOVA Table				
方差	SS	DF	MS	F
组间	SST	k-1	$MST = \frac{SST}{(k-1)}$	$\frac{MST}{MSE}$
组中	SSE	n-k	$MSE = \frac{SSE}{(n-k)}$	
Total	SS total	n-1		

使用ANOVA表

ANOVA Table				
方差	SS	DF	MS	F
组间	890.69	3	296.90	8.99
组中	594.41	18	33.02	
Total	1485.10	21		

统计检验

- $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, H_1$:不完全相等；
- 置信水平1%；
- 统计量： $F = \frac{SST/k-1}{SSE/n-k} = 8.99$
- 临界值 $F_{0.01}(3, 18) = 5.09$, 拒绝域$F > F_{0.01}(3, 18)$；
- p=0.00074；
- 拒绝原假设；至少有两个公司均值不相等。

5、配对处理均值的统计推断；

配对处理均值的统计推断

- 拒绝ANOVA原假设的情况下，找出均值不同的总体；
- 构造两总体均值差的置信区间。
- $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t\sqrt{MSE(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$
- df=n-k;
- MSE=SSE/(n-k).
- 置信区间包含0，则说明两总体均值无差别；反之，有差别。

airline例子：

Customer Nr.	Eastern	TWA	Allegheny	Ozark
1	94	75	70	68
2	90	68	73	70
3	85	77	76	72
4	80	83	78	65
5		88	80	74
6			68	65
7			65	
mean	87.25	78.2	72.86	69

- 比较Eastern和Ozark均值是否相同。

比较Eastern和Ozark均值是否相同

- $(\bar{X}_1 - \bar{X}_4) \pm t\sqrt{MSE(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_4})}$;
- MSE=33.02;
- $\bar{X}_1 = 87.25$; $\bar{X}_4 = 69$;
- $n_1 = 4$; $n_4 = 6$; $n - k = 18$;
- 5%置信水平，$t(0.05, 18) = 2.101$, $p(|X| > t) = 0.05$;
- CI: 18.25 ± 7.79=[10.46, 26.04].
- Eastern 和 Ozark均值不同。

比较Allegheny和TWA均值是否相同

- $(\bar{X}_2 - \bar{X}_3) \pm t\sqrt{MSE(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3})}$;
- MSE=33.02;
- $\bar{X}_21 = 78.2$; $\bar{X}_3 = 72.86$;
- $n_2 = 5$; $n_3 = 7$; $n - k = 18$;
- 5%置信水平，$t(0.05, 18) = 2.101$, $p(|X| > t) = 0.05$;
- CI: 5.34 $\pm$ 7.07=[-1.73, 12.41].
- Allegheny和TWA均值相同。

本章重点

- 1、F分布性质；
- 2、统计检验两总体方差是否相等；
- 3、ANOVA思路；
- 4、ANOVA表；
- 5、检验多个（三个以上）总体均值；
- 6、构造总体均值差的置信区间。