

经济统计 - 7

刁莉男

diaoln@jlu.edu.cn

吉林大学商学院

May 2, 2012

提纲

10. 单样本假设检验

- 1、什么是假设；
- 2、什么是假设检验；
- 3、假设检验的五步法；
- 4、单尾（单边）和双尾（双边）显著性检验；
- 5、总体均值的检验：总体标准差已知；
- 6、假设检验中的 p 值；
- 7、总体均值的检验：总体标准差未知；
- 8、有关比例的检验；

本章重点

- ▶ 1、假设、假设检验；
- ▶ 2、假设检验的五个步骤；
- ▶ 3、单尾、双尾假设检验；
- ▶ 4、总体均值假设检验；
- ▶ 5、总体比例假设检验；
- ▶ 6、第一类、第二类错误。

1、什么是假设（Hypothesis）。

假设

假设：一个有待验证的，关于总体参数的陈述。

2、什么是假设检验（Hypothesis Testing）；

假设检验

假设检验：基于样本证据和概率论理论，对所做假设的合理性进行判断的一套方法或程序。假设检验一般分五步。

- ▶ 抽样、计算样本统计量、基于决策规则决定是接受还是拒绝假设。

3、假设检验的五步法；

假设检验五步法

- ▶ 步骤1、写出原假设以及备选假设；
- ▶ 步骤2、选择显著性水平；
- ▶ 步骤3、选择检验统计量；
- ▶ 步骤4、制定决策准则；
- ▶ 步骤5、做出决策：
 - ▶ 不拒绝原假设 or
 - ▶ 拒绝原假设，接受备选假设。

步骤1：写出原假设(Null Hypothesis: H_0)以及备选假设(Alternative Hypothesis: H_1)

原假设(零假设)：为了达到某一特定的研究目的而设定的关于总体参数值的一个陈述。在假设检验中，原假设是我们希望证伪的那个假设。

- ▶ 包含“=”，表示无区别($\mu = 60,000$)。一般陈述为“无显著性区别。”
- ▶ 只有在样本提供令人信服的证据时才拒绝原假设。
- ▶ 不拒绝原假设时，不代表原假设是正确的，只是没能拒绝原假设。

步骤1：写出原假设(Null Hypothesis: H_0)以及 备选假设(Alternative Hypothesis: H_1)

备选假设：如果样本数据提供了充分的证据证明原假设是假的，则我们拒绝原假设，而接受备选假设。是我们在假设检验中希望证真的假设。

步骤2：选择显著性水平(Level of Significance)

显著性水平 α （风险水平，Level of Risk）：当原假设为真时被拒绝的概率（风险）。

取值为 $[0, 1]$ ，一般取0.01、0.05或者0.10。

- ▶ 第一类错误(α)：当 H_0 为真时，拒绝；
- ▶ 第二类错误(β)：当 H_0 为假时，接受。

步骤3：选择检验统计量

检验统计量：根据样本信息计算的，用来决定是否拒绝原假设的一个值。

▶ 例如： σ 已知时，检验样本均值用到 z 统计量。

▶
$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

步骤4：制定决策准则

决策准则：拒绝或者接受原假设的特定条件，即：确定拒绝域。

临界值：已知显著性水平对应的原假设被拒绝或接受的分界点。

步骤5：做出决策

计算检验统计量，与临界值相比较：

- ▶ 统计量大于临界值，拒绝原假设；
- ▶ 否则，被迫接受原假设。

假设检验

- ▶ 提出原假设以及备选假设；
- ▶ 确定显著性水平；
- ▶ 选择合适统计量；
- ▶ 确定决策规则；
- ▶ 作出决策。

4、单尾和双尾显著性检验；

单尾显著性检验

右侧检验：

- ▶ 例如：检验包装是否超重，包装写明重量453g。
- ▶ $H_0 : \mu \leq 453$, $H_1 : \mu > 453$

左侧检验：

- ▶ 例如：检验轮胎行驶里程是否少于6万公里。
- ▶ $H_0 : \mu \geq 6$, $H_1 : \mu < 6$

单尾显著性检验

- ▶ 备选假设与检验方向一致；
- ▶ 等号永远包含在原假设。

双尾显著性检验

如果检验目标为参数是否与某个值不同，则为双尾显著性检验。

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 轮胎厂检验轮胎行驶里程是否显著不同于6万公里；

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 轮胎厂检验轮胎行驶里程是否显著不同于6万公里；
- ▶ $H_0 : \mu = 6$, $H_1 : \mu \neq 6$

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 轮胎厂检验轮胎行驶里程是否显著不同于6万公里；
- ▶ $H_0 : \mu = 6$, $H_1 : \mu \neq 6$
- ▶ 快餐店检验顾客的平均等候时间是否少于3分钟；

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 轮胎厂检验轮胎行驶里程是否显著不同于6万公里；
- ▶ $H_0 : \mu = 6, H_1 : \mu \neq 6$
- ▶ 快餐店检验顾客的平均等候时间是否少于3分钟；
- ▶ $H_0 : \mu \geq 3, H_1 : \mu < 3$

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 某人工工资大于80美元每天；

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 某人工工资大于80美元每天；
- ▶ $H_0 : \mu \leq 80$, $H_1 : \mu > 80$

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 某人工工资大于80美元每天；
- ▶ $H_0 : \mu \leq 80$, $H_1 : \mu > 80$
- ▶ 学生每月观看DVD是否少于6.8张；

单尾和双尾显著性检验

写出下列检验的原假设与备选假设：

- ▶ 某人工工资大于80美元每天；
- ▶ $H_0 : \mu \leq 80$, $H_1 : \mu > 80$
- ▶ 学生每月观看DVD是否少于6.8张；
- ▶ $H_0 : \mu \geq 6.8$, $H_1 : \mu < 6.8$

5、总体均值的检验：总体标准差已知；

双尾检验

一家具厂生产某办公桌周产量服从 $N(200, 16^2)$ 。使用了新的生产技术后，去年一年(50周)周平均产量为203.5。生产能力在0.01显著性水平下是否显著不同于200。

Step1 : 写出原假设和备选假设

- ▶ $H_0 : \mu = 200$,
- ▶ $H_1 : \mu \neq 200$ 。

Step2：确定显著性水平

- ▶ $\alpha = 0.01$,
- ▶ 第一类错误（原假设为真而拒绝）的概率为0.01。

Step3：选取统计量

- ▶ 总体方差 σ 已知，
- ▶ 使用 z 统计量， $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
- ▶ \bar{X} 为样本均值， μ 为总体均值， σ 为总体标准差， n 为样本容量。

Step4：确定决策规则

- ▶ 根据显著性水平找到临界值；
- ▶ 查表或使用 EXCEL($z_{0.005} = 2.58$)；
- ▶ 决策规则为：
 - ▶ $|z|$ 值大于2.58，拒绝原假设，接受备选假设；
 - ▶ $|z|$ 值小于2.58，不能提供足够证据拒绝原假设，被迫接受原假设。

Step5：做出决定并解释结果

- ▶ z 统计量值为 $z = \frac{203.5 - 200}{16/\sqrt{50}} = 1.55$;
- ▶ $z < z_{0.005}$ ，没有落到拒绝域内，接受原假设；
- ▶ 结论：使用新的生产技术后，周产量并没有得到显著提升。样本误差由随机抽样产生（抽样误差）。

与置信区间联系起来

- ▶ 构造样本均值99%的置信区间：
- ▶ $\bar{X} \pm z_{0.005} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 203.5 \pm 2.58 * \frac{16}{\sqrt{50}}$
- ▶ CI: [197.66, 209.34]
- ▶ 通常，置信区间内没有包含原假设中的值，都拒绝原假设。

练习

Heinz公司经过多年经验发现瓶装番茄酱重量服从 $N(16, 0.15^2)$ ，随机抽取50瓶，样本均值为16.017ounce。样本数据是否表明番茄酱重量显著不同于16ounce（0.05显著性水平下）？

- ▶ 原假设备选假设？
- ▶ 第一类错误？
- ▶ 检验统计量？
- ▶ 决策规则？
- ▶ 统计量值？
- ▶ 决策？
- ▶ 解释统计结果。

单尾检验

一家具厂生产某办公桌周产量服从 $N(200, 16^2)$ 。使用了新的生产技术后，去年一年(50周)周平均产量为203.5。生产能力在0.01显著性水平下是否显著不同于/大于200。

单尾检验

- ▶ 不同于：

$$H_0 : \mu = 200, \quad H_1 : \mu \neq 200 ;$$

$$\alpha = 0.01, \quad z_{0.005} = 2.58 ; \quad z = 1.55 。$$

- ▶ 大于：

$$H_0 : \mu \leq 200, \quad H_1 : \mu > 200 ;$$

$$\alpha = 0.01, \quad z_{0.01} = 2.33 ; \quad z = 1.55 。$$

6、假设检验中的p值；

假设检验中的p值

- ▶ 我们对拒绝原假设的置信程度是多少？
- ▶ 将p值与置信水平相比较。
- ▶ **p值**：给定原假设为真，新的样本抽样绝对值大于等于得到观测值的概率。

怎样计算p值

家具厂例子中：

$$H_0 : \mu = 200, H_1 : \mu \neq 200 ;$$

$$\alpha = 0.01,$$

$$z_{0.005} = 2.58 ;$$

$$z=1.55;$$

$$p=0.1212。$$

如果p值小于置信水平，拒绝原假设，否则被迫接受原假设。

假设检验中的p值

- ▶ $p < 0.10$ 时，有证据表明 H_0 为假；
- ▶ $p < 0.05$ 时，有很强证据表明 H_0 为假；
- ▶ $p < 0.01$ 时，有非常强证据表明 H_0 为假；
- ▶ $p < 0.001$ 时，有极强证据表明 H_0 为假；

练习

Heinz公司例子中： $N(16, 0.15^2)$, $\bar{X} = 16.017$,
 $n=50$, $\alpha = 0.05$ 。

是否表明番茄酱重量显著大于16ounces?

- ▶ 原假设备选假设?
- ▶ 决策规则?
- ▶ 如果新的抽样表明50瓶番茄酱平均重量为16.040ounces, 统计量?
- ▶ 决策?
- ▶ 解释统计检验结果?
- ▶ p值多少? 基于p值对原假设的决定?

7、总体均值的检验：总体标准差未知；

总体标准差未知

使用样本标准差 s 代替总体标准差 σ ，使用自由度为 $n-1$ 的 t 统计量：

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}。$$

例1:

保险公司报告表明处理一起保单平均成本为60美元，为了节约成本保险公司采取措施后随机抽取26个保单，处理成本如下：

45	49	62	40	43	61	48	53	67	63
78	64	48	54	51	56	63	69	58	51
58	59	56	57	38	76				

在0.01显著性水平下，平均成本是否显著低于60？

假设检验

- ▶ Step1: $H_0 : \mu \geq 60$, $H_1 : \mu < 60$;
- ▶ Step2: 置信水平 $\alpha = 0.01$;
- ▶ Step3: $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{56.42 - 60}{10.04/\sqrt{26}} = -1.818$;
- ▶ Step4: $t(0.01, 25) = -2.485$;
- ▶ Step5: 接受原假设：成本没有得到提高。
- ▶ p值： $p = 0.0405$ 。

例2:

一种小型平衡尺长度为43mm，随机抽取了12个尺子，数据如下：

42	39	42	45	43	40
39	41	40	42	43	42

在0.02显著性水平下，平均长度是否为43mm？

假设检验

- ▶ Step1: $H_0 : \mu = 43$, $H_1 : \mu \neq 43$;
- ▶ Step2: 置信水平 $\alpha = 0.02$;
- ▶ Step3: $t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{41.5 - 43}{1.784/\sqrt{12}} = -2.913$;
- ▶ Step4: $t(0.01, 11) = 2.718$;
- ▶ Step5: 拒绝原假设：尺子长度显著不等于43mm。
- ▶ p值： $p = 0.014$ 。

8、有关比例的检验；

有关比例的检验

通用汽车报告中指出，出租的汽车中70%的车返回来时行驶里程都不超过3.6万miles。最近的一项统计调查表明，200辆出租的汽车中有158辆行驶里程少于3.6万miles。

有关比例的检验

美国退休人员协会（AARP）报告中指出60%的65岁以下退休人员如果有合适机会都会接受全职工作。500个样本的退休人员表明315愿意返回到工作岗位。超过60%的退休人员愿意再重新工作吗？

有关比例的检验

一搬家公司许诺客户，对于远距离搬家，从收件之日起3-5天可以拿到自己的东西。统计表明，90%的情况下，搬家公司都会完成。最近的调查表明，200次搬家过程中，该搬家公司成功完成了190次，成功率升高了吗？

检验总体比例需要满足二项分布假设：

- ▶ 1. 样本数据为计数结果；
- ▶ 2. 试验结果分为“成功”或者“失败”；
- ▶ 3. 成功的概率为iid；
- ▶ 4. $n\pi > 5$ 并且 $n(1 - \pi) > 5$ 。

检验统计量

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

例：

某选举需要得到80%以上选民支持，一参选者调查了2000名选民，其中1550人支持该候选者。77.5%的支持率是否显著低于80%（0.05显著性水平下）？

例：

$$\pi = 0.80, \quad p = 0.775, \quad n = 2000。$$

- ▶ $H_0 : \pi \geq 0.80, H_1 : \pi < 0.80 ;$
- ▶ $\alpha = 0.05 ;$
- ▶ $z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}} = \frac{0.775 - 0.80}{\sqrt{\frac{0.80(1 - 0.80)}{2000}}} = -2.795,$
- ▶ $z_{0.05} = -1.65 ;$
- ▶ 拒绝原假设：支持率不足80%。